INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2002

Option **B. - ECONOMIE**

composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet comprend 5 pages (y compris celle-ci).

Le sujet est composé de deux problèmes et de deux exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2Arctg\frac{1-x}{1+x},$$

où $Arctg$ désigne la fonction réciproque de la fonction tangente.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Indiquer pour quelles valeurs de x, f est continue, puis dérivable et calculer pour ces valeurs la dérivée f' de f.
3. Etudier les variations et construire le graphe de f.
4. Montrer que la dérivée d'ordre $n-1$ de f est une fraction rationnelle de la forme :

   $$f^{(n-1)}(x) = \frac{A_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

   pour tout n entier naturel strictement supérieur à 1 et que le numérateur A_n est un polynôme de degré n.
5. Montrer que les racines de A_n sont réelles et distinctes.

Exercice 2

2

On suppose que la probabilité qu'un couple ait exactement e enfants est αp^e pour tout $e \geq 1$, où α est un paramètre réel et p un réel tel que $0 < p < 1$. On pourra noter E, F et G les variables aléatoires nombre d'enfants, de filles, de garçons qu'a le couple.
On a donc $P(E = e) = \alpha p^e$.

1. Montrer que la probabilité pour un couple de ne pas avoir d'enfant est $1 - \frac{\alpha p}{1-p}$.
2. En déduire que $1 + \alpha \leq \frac{1}{p}$.
3. Quelle est la probabilité qu'un couple ait f filles sachant qu'il a e enfants ?

   On admettra que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est de $\frac{1}{2}$ indépendamment des enfants précédents et suivants.
4. En déduire la probabilité qu'un couple ait f filles.

   On pourra utiliser l'égalité $\sum_{x=r}^{+\infty} C_x^r p^{x-r} = \frac{1}{(1-p)^{r+1}}$, où $C_x^r = \frac{x!}{r!(x-r)!}$.

Problème 1

Préliminaire

1. On considère la fonction :

$$K_\alpha(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx ,$$

où α désigne un nombre réel et t est un réel appartenant à $]0,1[$.

Montrer que :

a) pour tout $t \geq \frac{1}{2}$ et pour tout $\alpha \geq 0$, $\frac{1}{2^\alpha \sqrt{1-t^2}} \leq \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

b) pour tout $t \geq \frac{1}{2}$ et pour tout $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{2^\alpha \sqrt{1-t^2}}$.

En déduire que $K_\alpha(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 1.

On notera $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx$ cette limite.

2. On considère la fonction :

$$J_\alpha(t) = \int_{t}^{\frac{1}{2}} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx ,$$

où α désigne un nombre réel et t est un réel appartenant à $]0,1[$.

Quelle condition imposer à α pour que $J_\alpha(t)$ admette une limite finie lorsque t tend vers 0 ?

On suppose que α et $\alpha - 2$ vérifient cette condition : quelle condition cela entraîne-t-il pour α ?

On supposera **dans toute la suite du problème** que cette dernière condition est vérifiée et on définit la quantité :

$$W_\alpha = \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Première Partie

1. Trouver une relation de récurrence entre W_α et $W_{\alpha-2}$. On pourra utiliser une intégration par parties dans $\int_{u}^{v} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx$ puis étudier la limite de cette intégrale quand u tend vers 0 et v tend vers 1.

2. On suppose dans cette question que α est un entier naturel positif ou nul : on pose $\alpha = n$.

a) Calculer W_0 et W_1.

b) Calculer W_n en fonction de n.

Tournez la page S.V.P.

c) Calculer nW_nW_{n-1}.

d) Montrer que W_n est une fonction décroissante de n.

e) Trouver les limites quand n tend vers l'infini de $\frac{W_n}{W_{n-2}}$ et de $\frac{W_n}{W_{n-1}}$.

f) Trouver la limite quand n tend vers l'infini de $n(W_n)^2$. En déduire un équivalent de W_n et la limite de W_n quand n tend vers l'infini.

Deuxième Partie

On considère la fonction $f(\alpha) = \alpha W_\alpha W_{\alpha-1}$.

1. Pour quelles valeurs de α cette fonction est-elle définie ?
2. Montrer que $f(\alpha)$ est une fonction périodique de période 1.
3. Etudier le comportement de $f(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $f(\alpha)$ est une constante.

Problème 2

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension finie.
On désigne par e l'endomorphisme identité et on considère un endomorphisme u tel que $u^2 = u \circ u = u$. Un tel endomorphisme est appelé **projecteur**.

Première partie

1. Vérifier que u est un projecteur si et seulement si $e-u$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = Ker(e-u)$ et que $Ker(u) = \mathrm{Im}(e-u)$ où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image de u et $Ker(u)$ désigne le noyau de u.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $Ker(u)$ sont deux sous-espaces supplémentaires.

Deuxième Partie

On considère deux projecteur u et v.

1. Montrer $u+v$ est un projecteur si et seulement si $u \circ v + v \circ u = 0$.
2. Montrer que $u \circ v + v \circ u = 0$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u = 0$.
3. Montrer que $u+v$ est un projecteur si et seulement si :
$$\mathrm{Im}(v) \subset Ker(u) \textbf{ et } \mathrm{Im}(u) \subset Ker(v).$$
4. Montrer qu'un endomorphisme f de E commute avec un projecteur u si et seulement si :
$$f(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u) \textbf{ et } f(Ker(u)) \subset Ker(u).$$

Troisième Partie

On considère à présent l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels noté $M_n(R)$ et on définit l'application T sur $M_n(R)$ à valeur dans le corps des réels $\mathbb{R}$ qui à toute matrice M de $M_n(R)$ associe la somme des termes de la diagonale.

1. Montrer que l'application T ainsi définie est une forme linéaire.
2. Montrer que pour tout $(A,B) \in M_n(R)^2$, $T(AB) = T(BA)$.
3. Montrer que si M et N sont deux matrices semblables alors $T(M) = T(N)$.
4. Montrer que si P est la matrice d'un projecteur p, alors $T(P)$ est égal au rang de p.